1. Однажды в Артеке за круглым столом оказалось пятеро ребят родом из Москвы, Санкт-Петербурга, Новгорода, Перми и Томска: Юра, Толя, Алеша, Коля и Витя. Москвич сидел между томичем и Витей, санкт-петербуржец — между Юрой и Толей, а напротив него сидели пермяк и Алеша. Коля ни когда не был в Санкт-Петербурге, а Юра не бывал в Москве и Томске, а томич с Толей регулярно переписываются. Определите, в каком городе живет каждый из ребят.

Ответ:

	Юра	**Толя**	**Алеша**	**Коля**	**Витя**
Москва	-	+	-	-	-
Санкт-Петербург	-	-	-	-	+
Новгород	+	-	-	-	-
Пермь	-	-	-	+	-
Томск	-	-	+	-	-

2. Решите уравнение $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2$.

Решение:

Замена $y=\sqrt{x-4},\ y\geq 0$, $\begin{array}{l} y^2=x-4, \\ x=y^2+4. \end{array}$

Тогда

$$\sqrt{y^2+4-3-2y}-\sqrt{y^2+4+5-6y}=2,$$
$$\sqrt{y^2-2y+1}-\sqrt{y^2-6y+9}=2,$$
$$\sqrt{(y-1)^2}-\sqrt{(y-3)^2}=2,$$
$$|y-1|-|y-3|=2.$$

Нули модуля: $\begin{array}{l} y-1=0, y-3=0, \\ y=1, y=3. \end{array}$

$$|y-1|-|y-3|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\le 1, \\ -y+1+y-3=2, \end{cases} \\ \begin{cases} 1<y\le 3, \\ y-1+y-3=2, \end{cases} \\ \begin{cases} y>3, \\ y-1-y+3=2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\le 1, \\ 0\cdot y=4, \end{cases} \\ \begin{cases} 1<y\le 3, \\ 2\cdot y=6, \end{cases} \\ \begin{cases} y>3, \\ 0\cdot y=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\le 1, \\ y=\varnothing, \end{cases} \\ \begin{cases} 1<y\le 3, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} y>3, \\ y\in R, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\varnothing \\ y=3, \\ y>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow y\in[3,+\infty].$$

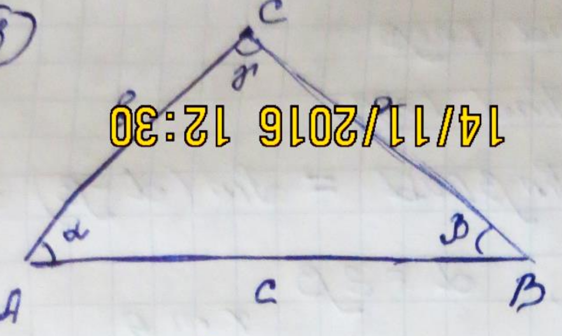
Возвращаемся к замене: $x=y^2+4$.

Поскольку $y\in[3,+\infty]$, то $x\in[13;+\infty]$.

Ответ: $[13;+\infty]$.

3. Докажите, что если в треугольнике $a^2 = b^2 + bc$, то $\alpha = 2\beta$.

③



Дано: $\triangle ABC$
$a^2 = b^2 + bc$

Доказать: $\alpha = 2\beta$

Док-во: Применим теорему косинусов:

$$-\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{cases}$$

$$b^2 - a^2 = a^2 - b^2 - 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha$$

$$2b^2 - 2a^2 = -2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha$$

$$-2(a^2 - b^2) = -2c(a\cos\beta - b\cos\alpha)$$

Известно, что $a^2 = b^2 + bc \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$

$$bc = c(a\cos\beta - b\cos\alpha)$$

$$b = a\cos\beta - b\cos\alpha \Rightarrow b(1+\cos\alpha) = a\cos\beta \ (*)$$

Применим теорему синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{\sin\alpha\cdot b}{\sin\beta}$$

$$b(1+\cos\alpha) = a\cos\beta = \frac{\sin\alpha\cdot b}{\sin\beta}\cdot\cos\beta$$

$$1+\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta}$$

$\sin\beta(1+\cos\alpha) = \sin\alpha\cos\beta$

$\sin\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = \alpha-\beta$, $\alpha = 2\beta$ ч.т.д.

4. Пусть $\begin{cases} ax+by=3, \\ ax^2+by^2=7, \\ ax^3+by^3=16, \\ ax^4+by^4=42, \end{cases}$ тогда ax^5+by^5 равно…

Решение:

Решение!

$$\begin{cases} ax+by=3 \\ ax^2+by^2=7 \\ ax^3+by^3=16 \\ ax^4+by^4=42 \end{cases}$$

Замена: $t=ax$, $z=by$

$$\begin{cases} t+z=3 \\ tx+zy=7 \\ tx^2+zy^2=16 \\ tx^3+zy^3=42 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3-z \\ (3-z)x+zy=7 \\ (3-z)x^2+zy^2=16 \\ (3-z)x^3+zy^3=42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3-z \\ 3x+z(y-x)=7 \\ 3x^2+z(y^2-x^2)=16 \\ 3x^3+z(y^3-x^3)=42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3-z \\ z(y-x)=7-3x \\ 3x^2+(7-3x)(y+x)=16 \\ 3x^3+(7-3x)(y^2+yx+x^2)=42 \end{cases}$$

Рассмотрим $3x^2+(7-3x)(y+x)=16$.

$3x^2+7y+7x-3xy-3x^2=16$,

$7(y+x)-3xy=16$

$\underline{-3xy=16-7(y+x)}$

Рассмотрим: $3x^3+(7-3x)(y^2+yx+x^2)=42$,

$$3x^3+7(y^2+yx+x^2)-3xy^2-3yx^2-3x^3=42$$

$$7(y^2+yx+x^2)-3xy(y+x)=42$$

$$7(y^2+yx+x^2)+(16-7(y+x))(y+x)=42$$

$$7y^2+7yx+7x^2+16(y+x)-7(y^2+2yx+x^2)=42$$

$$\underline{-7yx+16(y+x)=42}$$

У нас есть: $+\begin{cases}-7yx+16(y+x)=42\\ -3yx=16-7(y+x)\end{cases} \Rightarrow$

$$x+y=\frac{16+3yx}{7};$$

$$-7yx+16\left[\frac{16+3yx}{7}\right]=42$$

$$-49yx+16\cdot16+16\cdot3yx=7\cdot42$$

$$xy=-38$$

$$x+y=\frac{16+3\cdot(-38)}{7}=-14$$

Получили: $\begin{cases}xy=-38\\ x+y=-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=-38\\ x=-14-y\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(-14-y)y=-38\\ x=-14-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2+14y-38=0\\ x=-14-y\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-7\pm\sqrt{87}\\ x=-7\mp\sqrt{87}\end{cases}$$

$y_1=-7+\sqrt{87}$, $x_1=-7-\sqrt{87}$

$y_2=-7-\sqrt{87}$, $x_2=-7+\sqrt{87}$

У нас $z(y-x)=7-3x \Rightarrow z=\dfrac{7-3x}{y-x}$

$$z_1=\frac{7-3x_1}{y_1-x_1}=\frac{7-3(-7-\sqrt{87})}{-7+\sqrt{87}-(-7-\sqrt{87})}=\frac{28+3\sqrt{87}}{2\sqrt{87}}=$$

$$=\frac{14}{\sqrt{87}}+\frac{3}{2}$$

$$z_2=-\frac{14}{\sqrt{87}}+\frac{3}{2}$$

У нас $t=3-z$

$$t_1=3-z_1=3-\frac{14}{\sqrt{87}}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{14}{\sqrt{87}}$$

$$t_2=3-z_2=\frac{3}{2}+\frac{14}{\sqrt{87}}$$

Найдем $ax^5+by^5=ax\,x^4+by\,y^4=$

$=tx^4+zy^4$

$t_1x_1^4+z_1y_1^4=\ldots\ 20$

$t_2x_2^4+z_2y_2^4=\ldots\ 20$

Ответ: 20

5. В треугольнике *ABC* проведены биссектриса *AD* и медиана *CM*, пересекающиеся в точке *O*. известно, что *AB=6, BC=4, AC=5*. Найти отношение $S_{AOC} : S_{OMD}$.

Решение:

В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и медиана CM, пересекающиеся в точке O. Известно, что $AB = 6$, $BC=4$, $AC=5$. Найти отношение $S_{AOC} : S_{OMD}$.

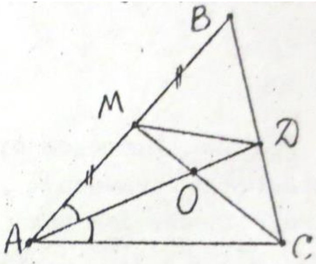


Рис. 12.

Решение. Согласно примеру 6 имеем $\frac{OM}{OC} = \frac{AM}{AC} = \frac{3}{5}$; $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{5}$. По теореме :

$$\frac{DO}{AO} = \frac{MB : MA}{1 + (BD : CD)} = \frac{1}{1 + 6/5} = \frac{5}{11}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{OMD}}{S_{AOC}} = \frac{\frac{1}{2} CM \cdot OD \cdot \sin\angle MOD}{\frac{1}{2} \cdot OC \cdot AO \cdot \sin\angle AOC} = \frac{OM}{OC} \cdot \frac{OD}{AO} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{11}.$$

Ответ: $S_{AOC} : S_{OMD} = 11 : 3$.

Пример 6.

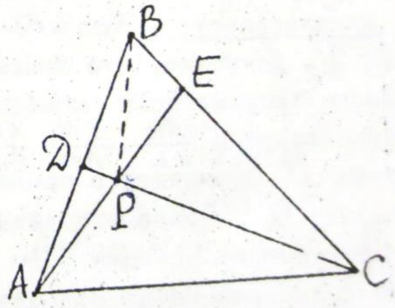
Доказать, что отношение длин отрезков, на которые биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC, равно отношению $AB:AC$.

Доказательство. Рассмотрим отношение $S_{ABD} : S_{ACD}$. По свойству 2 имеем $S_{ABD} : S_{ACD} = \frac{BD}{CD}$. С другой стороны, из формулы (2) получаем ($\angle BAD = \angle CAD$):

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{1/2 \cdot \sin\angle BAD \cdot AD \cdot AB}{1/2 \cdot \sin\angle CAD \cdot AD \cdot AC} = \frac{AB}{AC}.$$ Следовательно,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC},$$ что и требовалось.

Приведем еще примеры.



Теорема I. Пусть в треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки D и E, а точка P является точкой пересечения отрезков AE и CD (см.рис.I0). Если $BE:CE=\alpha$, $BD:AD=\beta$, то $\frac{PD}{PC} = \frac{\alpha}{\beta+1}$; $\frac{PE}{PA} = \frac{\beta}{\alpha+1}$.

Рис. I0.

Доказательство. Проведем отрезок BP. По свойству 2 $S_{BPD} : S_{APD} = BD:AD = \beta$. Другими словами, $S_{APB} = S_{BPD} + S_{APD} = \beta \cdot S_{APD} + S_{APD} = (1+\beta) \cdot S_{APD}$. По свойству 4 $S_{ABP} : S_{APC} = EB:EC = \alpha$. Значит, $\frac{(1+\beta)\cdot S_{APD}}{S_{APC}} = \alpha$; т.е. $\frac{S_{APD}}{S_{APC}} = \frac{\alpha}{1+\beta}$.

9

И по свойству (2) $\frac{DP}{PC} = \frac{S_{APD}}{S_{APC}} = \frac{\alpha}{\beta+1}$. Точно так же показывается, что $PE : AP = \beta : (\alpha+1)$.

6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной длиной 3 см., боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 5 см. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие расположены на прямых BB_1 и C_1D_1 соответственно. Найдите длину медианы этого треугольника.

Решение:

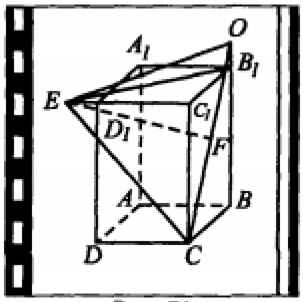


Рис. 71

Указание:

1) $ABCD$ – квадрат, $AB = 3$см, $AA_1 =$
$O \in BB_1$, $E \in D_1C_1$, $B_1O = y$,
$ED_1 = x$, $CE = EO = OC$, $OF =$

2) ΔCC_1E,
$CE = \sqrt{CC_1^2 + C_1E^2} = \sqrt{25 + (3 +$

3) ΔB_1C_1E,
$B_1E = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1E^2} = \sqrt{9 + (3 +$

4) ΔOB_1E, $OE = \sqrt{OB_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{y^2 + 9 + (3+x)^2}$;

5) $OE = CE$, $\sqrt{25 + (3+x)^2} = \sqrt{y^2 + 9 + (3+x)^2} \Rightarrow y = 4$ см;

6) ΔOBC, $OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = 3\sqrt{10}$ см;

7) ΔEFO, $EF = OE \sin\angle FOE = \dfrac{3\sqrt{30}}{2}$ см (рис. 71).

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{30}}{2}$ см.