1. Найдите произведение

$$\left(\sin 0^\circ - \cos 0^\circ\right)\left(\sin 1^\circ - \cos 1^\circ\right)\ldots\left(\sin 89^\circ - \cos 89^\circ\right)\left(\sin 90^\circ - \cos 90^\circ\right)$$

Решение: Среди сомножителей есть разность $\sin 45^\circ - \cos 45^\circ$, равная 0, поэтому произведение равно 0.

Ответ: 0.

2. Заменить буквы цифрами так, чтобы равенство БЕСЫ=$($Б+Е+С+Ы$)^4$ оказалось верным. **(10 баллов)**

Решение: Поскольку четвертая степень числа БЕСЫ=x является четырехзначным числом, то само число x не меньше 6 и не больше 9, так что БЕСЫ – одно из чисел 1296, 2401, 4096, 6561. Из перечисленных чисел лишь второе удовлетворяет требуемому условию, а именно: Б=2, Е=4, С=0, Ы=1.

Ответ: $2401=(2+4+0+1)^4$

3. Решите уравнение $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}=16$.

Решение: Левую часть уравнения запишем в виде $x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots=x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$.

Далее используем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Т.о.,

$x^2=16\Rightarrow x=4$.

Ответ: $x=4$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy=x+y, \\ xz=3(x+z), \\ yz=2(y+z). \end{cases}$

Решение: Преобразуем систему

$$\begin{cases} xy=x+y, \\ xz=3(x+z)=3x+3z, \\ yz=2(y+z)=2y+2z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=x+y, \\ z(x-3)=3x, \\ z(y-2)=2y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=x+y, \\ z=\dfrac{3x}{x-3}, \\ z=\dfrac{2y}{y-2}. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения приравняем:

$$\frac{3x}{x-3}=\frac{2y}{y-2}\Leftrightarrow 3x\left(y-2\right)=2y\left(x-3\right)\Leftrightarrow 3xy-6x=2yx-6y\Leftrightarrow xy=6\left(x-y\right).$$

Имеем $\begin{cases}xy=x+y,\\ xy=6\left(x-y\right),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6xy=6x+6y,\\ xy=6x-6y.\end{cases}$

Складываем уравнения: $7xy=12x\Rightarrow 7xy-12x=0\Rightarrow x\left(7y-12\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ y=\dfrac{12}{7}.\end{array}\right.$

1. $x=0$.

$$xy=x+y\Rightarrow y\left(x-1\right)=x\Rightarrow y=\frac{x}{x-1}\Rightarrow y=0,\ z=\frac{3x}{x-3}=0.$$

2. $y=\dfrac{12}{7}$.

$$xy=x+y\Rightarrow x\left(y-1\right)=y\Rightarrow x=\frac{y}{y-1}=\frac{12}{5},\ z=\frac{2y}{y-2}=-12$$

Ответ: $\left(0,0,0\right),\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{12}{7},-12\right)$.

5. 10 студентов, среди которых Федин и Шилов, случайным образом занимают очередь в библиотеку. Сколько существует вариантов расстановки студентов, когда между Фединым и Шиловым окажутся 6 студентов?

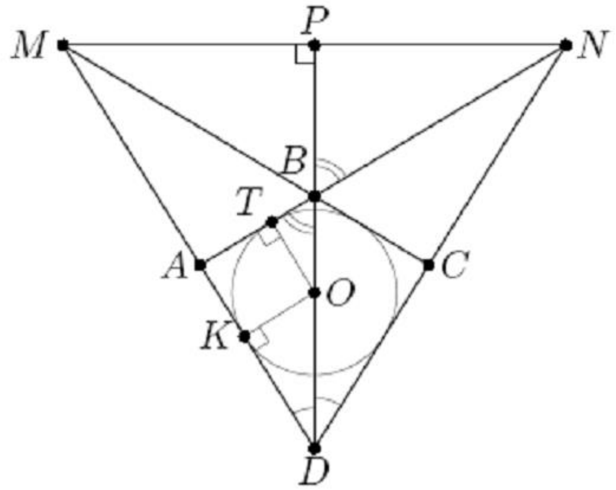
Решение. Шесть студентов, стоящих между Шиловым и Фединым, выбираем из восьми. Таких вариантов будет $C_8^6=\dfrac{8!}{6!\cdot 2!}=\dfrac{8\cdot 7}{2}=28.$ Между собой их можно переставить $P_6=6!$ способами. Шилова и Федина можно переставить $P_2=2!$ способами. Двух оставшихся студентов можно между собой переставить $P_2=2!$ способами. Осталось учесть варианты взаимного расположения восьми человек (Шилов, Федин и 6 студентов между ними) и двоих студентов. Таких вариантов будет три (двое стоят позади восьми человек, впереди, один из двоих впереди, другой позади). Общее количество вариантов равно:

$$n = C_8^6 \cdot P_6 \cdot P_2 \cdot P_2 \cdot 3 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} \cdot 6!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3 = 8!\cdot 2 \cdot 3 = 241920.$$

Ответ: 241920.

6. В четырехугольнике *ABCD*, в котором *BA*=*BC* и *DA*=*DC*, продолжения сторон *BA* и *CD* пересекаются в точке *N*, а продолжения сторон *BC* и *AD* – в точке *M*. Известно, что разность длин двух сторон четырехугольника *ABCD* равна радиусу вписанной в этот четырехугольник окружности. Найдите отношение длин отрезков *BD* и *MN*.

Решение. Пусть O – центр окружности ω, вписанной в четырёхугольник $ABCD$, а r – ее радиус (см. рис. 11). Можно считать, что $AD - AB = r$.



Заметим, что полученная фигура симметрична относительно прямой BD.

Продолжим DB до пересечения с MN, пусть P – точка пересечения. Пусть K и T – соответственно точки касания сторон AD и AB с окружностью ω. Тогда $AK = AT$, поэтому $r = AD - AB = DK - BT$. Из подобия прямоугольных треугольников DKO и DPM следует, что $DK : DP = KO : MP$, откуда $DK = r \cdot \frac{DP}{MP}$. Далее, из подобия прямоугольных треугольников OTB и NPB следует, что $BT : BP = OT : PN$, откуда $BT = r \cdot \frac{BP}{PN}$. Но $PN = PM$ из симметрии; поэтому $DK - BT = r \cdot \frac{DP - BP}{MP} = r \cdot \frac{DB}{MP}$. Левая часть этого равенства равна r, поэтому $DB = MP$. Значит, искомое отношение равно $DB : (2MP) = 1 : 2$.

Ответ: *BD*:*MN*=1:2.